# 关于 Smarandache 二重阶乘函数的值分布问题

葛 键

(西安财经学院统计学院, 陕西 西安 710061)

**摘 要**: 对任意正整数 $n$, 著名的 Smarandache 二重阶乘函数 $SDF(n)$ 定义为最小的正整数 $m$ 使得 $m!!$ 能够被 $n$ 整除, 其中二重阶乘函数 $m!! = 1\cdot3\cdot5\cdots m$, 如果 $m$ 是奇数; $m!! = 2\cdot4\cdot6\cdots m$, 如果 $m$ 是偶数. 本文的主要目的是利用初等方法研究函数 $SDF(n)$ 的值分布性质, 并给出一个有趣的均值公式.

**关 键 词**: Smarandache 二重阶乘函数; 值分布性质; 均值; 渐近公式

**中图分类号**: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2008)03-0473-04

## 1 引言及结论

对任意正整数 $n$, 著名的 Smarandache 二重阶乘函数 $SDF(n)$ 定义为最小的正整数 $m$ 使得 $m!!$ 能够被 $n$ 整除, 其中二重阶乘函数

$$m!! = \begin{cases} 1\cdot3\cdot5\cdots m, & \text{如果 } m \text{ 是奇数} \\ 2\cdot4\cdot6\cdots m, & \text{如果 } m \text{ 是偶数} \end{cases}$$

例如, $SDf(n)$ 的前几个值分别是

$$SDF(1)=1,\ SDF(2)=2,\ SDF(3)=3,\ SDF(4)=4,\ SDF(5)=5,\ SDF(6)=6$$

$$SDF(7)=7,\ SDF(8)=4, SDF(9)=9,\ SDF(10)=10,\ SDF(11)=11,\ SDF(12)=6$$

在文 [1-2] 中, Smarancdache 教授建议我们研究函数 $SDF(n)$ 的性质. 关于这一问题, 一些作者进行了研究, 获得了不少有趣的结果. 例如文 [3] 中, 证明了对任意实数 $x>1$ 及给定的正整数 $k$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}(SDF(n)-P(n))^2 = \frac{\zeta(3)}{24}\frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $P(n)$ 表示正整数 $n$ 的最大素因子, 所有 $c_i$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$) 是可计算的常数.

其它与 Smarandache 二重阶乘函数有关的内容见文 [4-6]. 例如, 文 [4] 研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 的值分布问题, 证明了下面的结论: 设 $P(n)$ 表示 $n$ 的最大素因子, 那么对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

收稿日期: 2006-11-10 .

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60472068).

作者简介: 葛 键 (1961-) , 副教授, 研究方向: 基础数学的教学与研究.

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

本文的主要目的是利用初等方法将文 [4] 中的结论推广到 Smarandache 二重阶乘函数 $SDF(n)$ 上, 即就是给出 $SDF(n)$ 的一个均值分布定理. 具体地说也就是证明下面的:

**定理** 对任意实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2=\frac{8}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $P(n)$ 表示 $n$ 的最大素因子,$\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

## 2 几个引理

在给出必要的引理之前, 我们先将区间 $[1,\ x]$ 分成下列三个子集 $A$, $B$ 和 $C$ 如下

$$A=\{n:\ 1\leq n\leq x,\ P(n)>\sqrt{n}\}$$

$$B=\{n:\ 1\leq n\leq x,\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leq\sqrt{n}\}$$

$$C=\{n:\ 1\leq n\leq x,\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}\}$$

其中 $P(n)$ 表示 $n$ 的最大素因子.

现在我们将定理的证明分为下面几个简单引理:

**引理 1** 对任意正整数 $n>2$, 我们有恒等式

(i) 如果 $n\in A$ 且 $2\dagger n$, 那么 $SDF(n)=P(n)$; 如果 $n\in A$ 且 $2\mid n$, 那么 $SDF(n)=2P(n)$.

(ii) 如果 $n=mp_1P(n)$ 且 $n\in B$, 则当 $2\dagger n$ 时有 $SDF(n)=P(n)$; 当 $2\mid n$ 时有 $SDF(n)=2P(n)$.

(iii) 如果 $n=mP^2(n)$ 且 $n\in B$, 则当 $2\dagger n$ 时有 $SDF(n)=3P(n)$; 当 $2\mid n$ 时有 $SDF(n)=4P(n)$.

**证明** 由 Smarandache 二重阶乘函数 $SDF(n)$ 的定义及性质容易推出这些结论.

**引理 2** 对任意实数 $x\geq 3$, 我们有估计式

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2\ll x^{\frac{4}{3}}\ln x$$

**证明** 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 $n$ 的标准素幂分解, 那么当 $n$ 为奇数时我们有

$$SDF(n)=\max_{1\leq i\leq r}\{SDF(p_i^{\alpha_i})\}\leq\max_{1\leq i\leq r}\{(2\alpha_i-1)p_i\}$$

而当 $n$ 为偶数时有

$$SDF(n)=\max_{1\leq i\leq r}\{SDF(2p_i^{\alpha_i})\}\leq\max_{1\leq i\leq r}\{2\alpha_ip_i\}$$

设 $\alpha p = \max_{1\le i\le r}\{2\alpha_i p_i\}$. 则显然有 $\alpha \le \ln n$. 所以 $SDF(n) \ll p\ln n$. 于是我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}}}}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2 \ll \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}},\ P^2(n)\mid n}} P^2(n)\ln^2 x$$
$$\ll \sum_{\substack{np^2\le x\\ p\le x^{\frac{1}{3}}}} p^2\ln^2 x \ll \sum_{p\le x^{\frac{1}{3}}} p^2 \sum_{n\le \frac{x}{p^2}} \ln^2 x = O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln x\right)$$

于是证明了引理 2.

**引理 3**　设 $p$ 表示素数, $m$ 是一个正整数且 $m \le x^{\frac{1}{3}}$. 那么我们有

$$\sum_{m\le p\le\sqrt{\frac{x}{m}}} p^2 = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}\right)}\right)$$

**证明**　这个渐近公式可由 Abel's 求和公式及素数定理推出. 有关内容可参阅文 [6-9].

## 3 定理的证明

本节我们利用前面三个简单引理来完成定理的证明. 首先由引理 1, 引理 2 以及集合 $A$, $B$ 及 $C$ 的定义我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2+\\
&\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\ln x\right)
\end{aligned}\tag{1}$$

注意到当 $n^{\frac{1}{3}} < P(n) \le \sqrt{n}$ 时, 存在以下三种情况:

(a) $n = m\cdot P^2(n)$ 且 $m < P(n)$;

(b) $n = m\cdot p_1\cdot P(n)$ 且 $m < n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n)$, $p_1$ 为素数;

(c) $n = m\cdot P(n)$ 且 $P(m) \le n^{\frac{1}{3}}$.

当 $n$ 属于情形 (b) 和 (c) 时, 显然 $SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n) = 0$. 当 $n$ 属于情形 (a) 时, 由

引理 1 的 (iii) 式我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2=\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}(2P(n))^2$$

$$=\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}}(2P(n))^2=4\sum_{m<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}}p^2 \qquad (2)$$

结合 (1), (2) 及引理 3 我们有

$$\sum_{n\le x}\left(SDF(n)-\frac{3+(-1)^n}{2}P(n)\right)^2=\frac{8}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数. 于是完成了定理的证明.

**参 考 文 献**

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago:Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Perez M L. Florentin Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number Theory and Geometry [M]. Chicago:Xiquan Publishing House, 2000.

[3] Dumitrescu C, Seleccu V. Some Notions and Questions in Number Theory [M]. Gelndale:Erhus University Press, 1994.

[4] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006,49 (5):1009-1012.

[5] Jianbin Chen. Value distribution of the F.Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(2):15-18.

[6] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社,2007.

[7] Tom M Apostol. Introduction to analytical number theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[8] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[9] 赵院娥. 一个新的数论函数及其均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(2):163-166.

## On the value distribution problems of the Smarandache double-factorial function

GE Jian

( School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710061, China )

**Abstract:** For any positive integer $n$, the famous Smarandache double-factorial function $SDF(n)$ is defined as the smallest positive integer $m$, such that $m!!$ is divisible by $n$, where the double factorial $m!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots m$, if $m$ is odd; and $m!!=2\cdot 4\cdot 6\cdots m$, if $m$ is even. The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the value distribution properties of $SDF(n)$, and give an interesting mean value formula for it.

**Keywords:** the Smarandache double-factorial function, value distribution; mean value; asymptotic formula.

**2000MSC:** 11B83